

MÉTHODES DE POSITIONNEMENT: ASPECTS MÉTHODOLOGIQUES

Julien TOMAS ^{α *} Frédéric PLANCHET ^{α †}

^α ISFA - Laboratoire SAF [‡]

Résumé

Cette note de travail présente les différentes options envisageables concernant la construction de tables de mortalité spécifiques à une entité. À partir des tables de mortalité prospectives *best estimate* de place présentées dans la note II1291-11 v1.4, nous décrivons les méthodologies de positionnement permettant à un organisme donné d'ajuster la référence pour se rapprocher d'une vision *best estimate* de ses engagements. Ces méthodologies sont ordonnées suivant une complexité croissante. Nous illustrons les méthodes par le positionnement de la mortalité d'un portefeuille réel. Des indicateurs de validation, précisés dans la note II1291-14, permettent de juger de la pertinence de la table.

*Contact: julien.tomas@univ-lyon1.fr

†Contact: frederic.planchet@univ-lyon1.fr.

[‡]Institut de Science Financière et d'Assurances - Université Claude Bernard Lyon 1 - 50 Avenue Tony Garnier
- 69366 Lyon - France

Sommaire

1 Introduction	1
2 Identification des contraintes, notations, hypothèses et forme des données	2
2.1 Les contraintes	2
2.2 Les notations	2
2.3 Hypothèse des forces de mortalité constantes par morceaux	2
2.4 La forme des données	3
3 Les approches envisagées	3
3.1 Méthode 1 : Approche à un paramètre avec le SMR	3
3.2 Méthode 2 : Approche à deux paramètres avec un modèle relationnel	5
3.3 Méthode 3 : Modèle linéaire généralisé de Poisson incluant des interactions avec l'âge et l'année calendaire	6
3.4 Méthode 4 : Lissage non-paramétrique de la table du moment et application d'une dérive de mortalité	8
4 Conclusion	11
Références	12
Annexes	13
A Les données	13

1 Introduction

L'objectif de cette note de travail est de présenter les réflexions méthodologiques et pratiques concernant les différentes approches envisageables pour construire la table de mortalité propre d'un organisme en fonction de l'information spécifique apportée par cet organisme. À partir des tables de mortalité prospectives *best estimate* de place présentées dans la note II1291-11 v1.4, nous décrivons les méthodologies de positionnement permettant à un organisme donné d'ajuster la référence pour se rapprocher d'une vision *best estimate* de ses engagements.

Les techniques d'ajustement proposées reposent uniquement sur les deux éléments suivant :

- i. la référence de mortalité de place présentée dans la note II1291-11 v1.4,
- ii. ainsi que les données ligne à ligne issues du portefeuille (selon une structure proche de celle décrite dans la demande de données II1291-03 v1.2).

Plusieurs méthodologies de complexité croissante sont présentées. Elles laissent aux organismes une certaine latitude de choix, tout en préservant une grande simplicité de mise en œuvre pour la méthodologie de base. De plus elles permettent un ajustement simple à partir des données fournies, sans intervention approfondie d'un expert (mise à part pour la Méthode 4). Nous illustrons les méthodes par le positionnement de la mortalité d'un portefeuille réel. Des indicateurs de validation, qui seront précisés dans la note II1291-14, permettront alors de juger de la pertinence de la table.

Méthode 1. L'approche la plus simple envisagée est l'application d'un simple coefficient de réduction / majoration, appliqué de manière multiplicative aux forces de mortalité de la référence validée dans la note II1291-11 v1.4. En pratique ce coefficient est égal au SMR pour la population considérée, cf. [Liddell \(1984\)](#).

Méthode 2. La deuxième méthode est une variante semi-paramétrique du modèle de Brass (1971). Il s'agit de représenter linéairement les différences entre les logits des probabilités conditionnelles de décès issues de la table de mortalité de l'organisme et ceux de la référence, cf. Planchet and Thérond (2011, Ch.7).

Méthode 3. On considère un modèle linéaire généralisé de Poisson comportant la référence de mortalité de place comme variable explicative et contenant des interactions avec l'âge atteint et l'année calendaire, cf. Tomas and Planchet (2013).

Méthode 4. Enfin, on envisage une approche incluant, au préalable, un lissage non-paramétrique de la table du moment et l'application à cette table des taux d'amélioration ajustés à partir de la référence. L'utilisation de cette méthode requière une validation par un expert.

Les aspects techniques des méthodologies proposées figurent en annexe de la note II1291-11 v1.4. Cette note de travail est organisée de la manière suivante. La section 2 identifie les problèmes et contraintes et présente de façon précise les notations et hypothèses employées par la suite. La section 3 couvre l'aspect méthodologique des approches envisagées. Enfin, la section 4 présente les conclusions de cette note méthodologique.

2 Identification des contraintes, notations, hypothèses et forme des données

Cette section identifie les contraintes auxquelles nous faisons face et expose de manière précise les notations et hypothèses employées par la suite.

2.1 Les contraintes

La méthode d'ajustement proposée doit répondre aux contraintes suivantes :

- i. Elle doit reposer uniquement sur deux éléments, à savoir
 - i-i. La référence de mortalité de place, cf. II1291-11 v1.4.
 - i-ii. Les données ligne à ligne issues du portefeuille (selon une structure proche de celle décrite dans la demande de données II1291-03 v1.2).

Elle doit donc permettre un ajustement simple à partir des données fournies, sans intervention approfondie d'un expert.

- ii. Elle doit pouvoir s'adapter quelque soit la plage d'âges et l'historique considérés, sous entendu que la période d'observation de l'organisme doit comporter au moins une année commune avec la référence de mortalité de place construite et validée dans la note II1291-11 v1.4. À ce sujet, on se posera la question de l'antériorité optimale pouvant être spécifique à chaque organisme.
- iii. Elle doit fournir un ajustement cohérent quel que soit le volume de données disponible.

2.2 Les notations

On note $L_{x,t}$ le nombre d'individus âgés x vivant au 1er janvier de l'année calendaire t . $D_{x,t}$ est le nombre de décès enregistré à l'âge x durant l'année calendaire t d'une exposition au risque $ER_{x,t}$. La probabilité qu'un individu âgé x décède durant l'année calendaire t est notée $q_x(t)$ et $p_x(t) = 1 - q_x(t)$ est la probabilité correspondante de survie. Enfin, $\varphi_x(t)$ dénote la force de mortalité à l'âge x dans l'année calendaire t .

2.3 Hypothèse des forces de mortalité constantes par morceaux

Nous supposons que les forces de mortalité sont constantes par morceaux entre les âges et années entiers, i.e.

$$\varphi_{x+\xi}(t+\zeta) = \varphi_x(t) \text{ pour } 0 \leq \xi < 1 \text{ et } 0 \leq \zeta < 1 \text{ et } x, t \text{ entiers.}$$

Sous cette hypothèse, la relation entre les probabilités conditionnelles de décès et les forces de mortalité s'écrit :

$$q_x(t) = 1 - \exp(-\varphi_x(t)) \quad \text{et} \quad \varphi_x(t) = -\ln(1 - q_x(t)).$$

2.4 La forme des données

On suppose que l'on dispose de données ligne à ligne issues d'un portefeuille d'un organisme, selon une structure proche de celle décrite dans la demande de données II1291-03 v1.2. À chacune des ces observations i , on associe une indicatrice δ_i indiquant si l'individu est décédé ou non,

$$\delta_i = \begin{cases} 1 & \text{si l'individu } i \text{ est décédé,} \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

pour $i = 1, \dots, L_{x,t}$. On définit τ_i , le temps durant lequel l'individu i est observé (c'est l'exposition au risque). On suppose avoir à disposition pour chacun des $L_{x,t}$ individus les observations (δ_i, τ_i) .

Ainsi,

$$\sum_{i=1}^{L_{x,t}} \tau_i = ER_{x,t} \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{L_{x,t}} \delta_i = D_{x,t}.$$

Nous illustrons les méthodes par le positionnement de la mortalité d'un portefeuille réel. Pour information, il s'agit d'un portefeuille composé uniquement de contrats d'épargne. La Table 7, en Annexe A, présente les caractéristiques observées de la population masculine et féminine. Les Figures 6 et 7, en Annexe A, présentent les statistiques observées de la population masculine et féminine respectivement.

3 Les approches envisagées

Les méthodologies présentées dans cette section répondent aux contraintes décrites à la section 2.1. Elles sont ordonnées selon leur complexité.

3.1 Méthode 1 : Approche à un paramètre avec le SMR

L'approche à un paramètre est la méthodologie la plus simple envisagée. Il s'agit de l'application d'un simple coefficient de réduction / majoration, appliqué de manière multiplicative aux probabilités conditionnelles de décès de la référence. Ce coefficient est le SMR pour la population considérée, cf. Liddell (1984). Ainsi, on obtient les probabilités de décès de l'organisme $\hat{q}_x(t)$ pour $x \in [30, 130]$ et $t \in [2012, 2060]$ par

$$\hat{q}_x(t) = \text{SMR} \times q_x^{\text{réf}}(t) \quad \text{avec} \quad \text{SMR} = \frac{\sum_{(x^*, t^*)} D_{x^*, t^*}}{\sum_{(x^*, t^*)} -L_{x^*, t^*} \ln(1 - q_{x^*}^{\text{réf}}(t^*))},$$

où x^* et t^* correspondent respectivement à la plage d'âges et période d'observation communes avec la référence de mortalité.

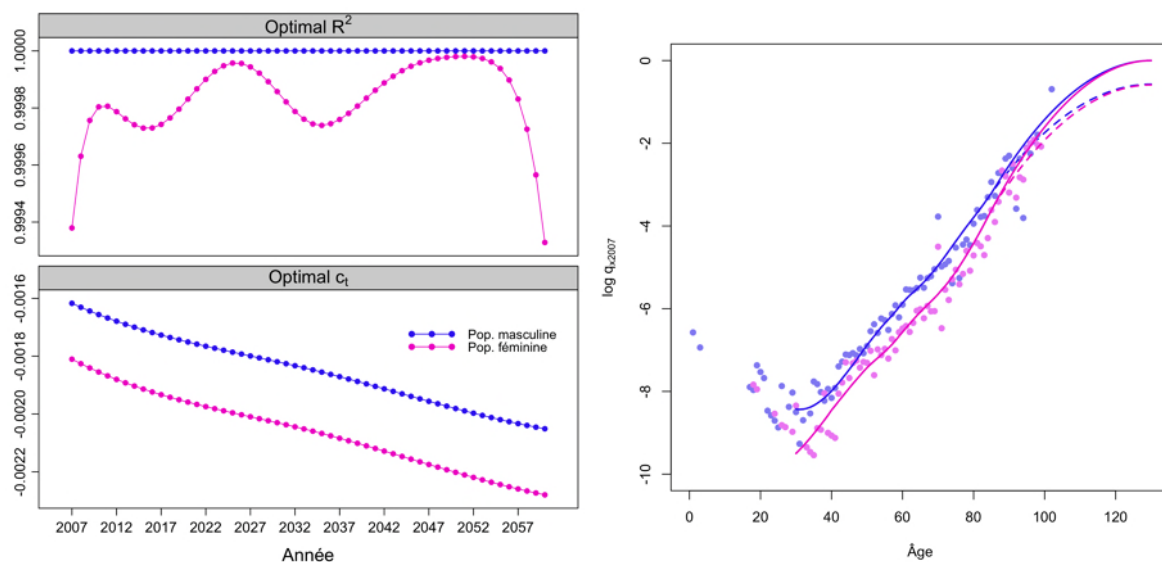
En conséquence, on ajuste la mortalité de l'organisme uniquement avec un paramètre, le SMR. Il représente la déviation observée entre les décès de l'organisme et ceux prédits avec la référence de mortalité.

Le choix de la plage d'âges x^* pour le calcul du SMR à une grande importance car la table construite par positionnement ne sera valide que sur la plage d'âges retenue. La table 1 présente les valeurs du SMR pour différentes plages d'âges. Pour notre application, nous avons retenu la plage d'âges 40 – 85. Compte tenu de l'exposition large du portefeuille, le SMR varie peu. Pour des portefeuilles de taille plus modeste, le choix de la plage d'âges peut se révéler plus compliqué.

	Plage d'âges				
	30 – 100	35 – 90	40 – 85	45 – 80	60 – 80
Pop. Masculine	0.5601	0.5728	0.5782	0.5637	0.5113
Pop. Féminine	0.5549	0.5421	0.5560	0.5551	0.5071

TABLE 1: Valeurs du SMR pour différentes plages d'âges.

Il est nécessaire d'envisager une procédure pour la fermeture de la table. En effet, si la mortalité de l'organisme s'éloigne trop de la référence de mortalité, les probabilités de décès aux âges élevés n'auront pas de sens, spécifiquement si le SMR est largement supérieur à 1. Par la suite, nous appliquons la procédure de [Denuit and Goderniaux \(2005\)](#), cf. section 2.5 de la note II1291-11 v1.4. Le R^2 correspondant aux modèles de régression ajustés ainsi que les paramètres de régression c_t estimés sont présentés Figure 1a pour la population masculine et féminine.



(a) R^2 et paramètres de régression c_t estimés.

(b) Ajustement avant et après fermeture.

FIGURE 1: Paramètres de régression [Denuit and Goderniaux \(2005\)](#) et ajustement obtenu pour l'année 2007 pour la méthode 1.

Le modèle capture plus de 99.9 % de la variance des probabilités de décès aux âges élevés, cf. Figure 1a panel haut, pour les deux populations. Le paramètre de régression \hat{c}_t décroît de façon relativement linéaire avec l'année calendaire, cf. Figures 1a panel bas. Cet indicateur présente les tendances d'évolution de la mortalité aux grands âges. Nous constatons que la mortalité aux grands âges décroît et la vitesse d'amélioration est relativement similaire pour les deux populations.

Nous conservons les $\hat{q}_x(t)$ originaux pour les âges inférieurs à 85 ans pour la population masculine et féminine, et nous remplaçons les probabilités annuelles de décès au-delà pour les valeurs ajustées provenant de la régression quadratique, cf. [Denuit and Goderniaux \(2005\)](#). Les résultats pour l'année calendaire 2007, sont exposés dans la Figure 1b pour la population masculine et féminine. À titre d'information, nous avons conservé l'ajustement initial obtenu par notre méthode 1 (ligne pointillée).

3.2 Méthode 2 : Approche à deux paramètres avec un modèle relationnel

La deuxième méthode est une variante semi-paramétrique du modèle de Brass (1971). Le positionnement est effectué à l'aide de la fonction logistique,

$$\text{logit } q_{x^*}(t^*) = \alpha + \beta \text{logit } q_{x^*}^{\text{réf}}(t^*) + \epsilon_{x^*,t^*}.$$

où x^* et t^* correspondent respectivement à la plage d'âges et période d'observation communes avec la référence de mortalité, ϵ_{x^*,t^*} est le terme d'erreur et $q_{x^*}^{\text{réf}}(t^*)$ est la référence de mortalité. Les logits des probabilités conditionnelles de décès brutes sont ajustées sur les logits des probabilités de décès de la table de référence. Le choix des x^* est déterminé par la page d'âges dont les effectifs L_{x^*,t^*} sont non nuls :

$$x^* = \left[\max(\min(x|L_{x,t} \neq 0), \min(x^{\text{réf}})); \min(\max(x|L_{x,t} \neq 0), \max(x^{\text{réf}})) \right].$$

L'estimation est effectuée par une minimisation de la distance pondérée par l'exposition entre les forces de mortalité observées et estimées,

$$\sum |L_{x^*,t^*} \times (q_{x^*}(t^*) - \hat{q}_{x^*}(t^*))|.$$

La table 2 présente les valeurs des paramètres α et β du modèle de positionnement pour les populations masculine et féminine du portefeuille.

	α	β
Pop. Masculine	-1.1598	0.8827
Pop. Féminine	-1.0222	0.9325

TABLE 2: Paramètres du modèle de positionnement logistique.

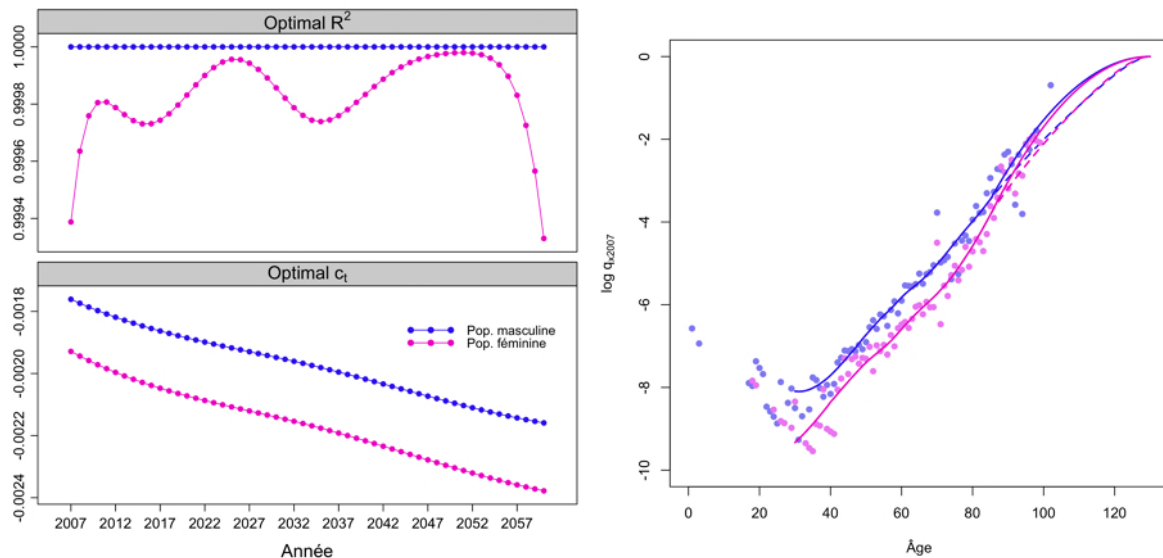
Le paramètre α est un indicateur de mortalité qui affecte tous les âges alors que le paramètre β modifie cet effet avec l'âge. Le modèle semi-paramétrique relationnel a l'avantage d'intégrer l'estimation et l'extrapolation des tendances de mortalité. Nous renvoyons à Planchet and Thérond (2011, Ch.7) pour plus de détails. Enfin, on obtient les probabilités de décès de l'organisme $\hat{q}_x(t)$ pour $x \in [30, 130]$ et $t \in [2012, 2060]$ par

$$\hat{q}_x(t) = \frac{\exp(\hat{\alpha} + \hat{\beta} \text{logit } q_x^{\text{réf}}(t))}{1 + \exp(\hat{\alpha} + \hat{\beta} \text{logit } q_x^{\text{réf}}(t))}.$$

Il est utile de mentionner que dans l'intervalle $]0, 1/2[$ la fonction logit est concave et par l'inégalité de Jensen, si une fonction $f(x)$ est concave alors $\mathbb{E}[f(x)] \geq f(\mathbb{E}[x])$. Cela implique que $\mathbb{E}[\text{logit } \hat{q}_x(t, i)] \leq \text{logit } q_x(t, i)$, cf. Planchet and Thérond (2011, Ch.7). En conséquence, les probabilités de décès sont sous-estimées lorsque $q_x(t, i) < 1/2$ et sur-estimées réciproquement. Les modèles utilisant les logits des données de mortalité doivent être utilisés avec prudence dans le cas du risque décès puisqu'ils sous-estiment les taux de mortalité, parfois avec des proportions importantes. Cependant, ils entraînent une marge de sécurité dans le cas du risque de survie.

La déviation entre la mortalité de l'organisme et la référence peut entraîner un ajustement peu réalistes aux âges élevés. Il est alors nécessaire d'envisager une procédure pour la fermeture de la table. Nous appliquons la procédure de Denuit and Goderniaux (2005), cf. section 2.5 de la note III291-11 v1.4.

Le R^2 correspondant aux modèles de régression ajustés ainsi que les paramètres de régression c_t estimés sont présentés Figure 2a pour la population masculine et féminine.



(a) R^2 et paramètres de régression c_t estimés.

(b) Ajustement avant et après fermeture.

FIGURE 2: Paramètres de régression Denuit and Goderniaux (2005) et ajustement obtenu pour l'année 2007 pour la méthode 2.

Le modèle capture plus de 99.9 % de la variance des probabilités de décès aux âges élevés, cf. Figure 2a panel haut, pour les deux populations. Le paramètre de régression \hat{c}_t décroît de façon relativement linéaire avec l'année calendaire, cf. Figures 2a panel bas. Similairement à la section précédente, nous constatons que la mortalité aux grands âges décroît et la vitesse d'amélioration est relativement identique pour les deux populations.

Nous conservons les $\hat{q}_x(t)$ originaux pour les âges inférieurs à 85 ans pour la population masculine et féminine, et nous remplaçons les probabilités annuelles de décès au-delà pour les valeurs ajustées provenant du modèle de fermeture. Les résultats pour l'année calendaire 2007, sont exposés dans la Figure 2b pour la population masculine et féminine. À titre d'information, nous avons conservé l'ajustement initial obtenu par notre méthode 2 (ligne pointillée).

3.3 Méthode 3 : Modèle linéaire généralisé de Poisson incluant des interactions avec l'âge et l'année calendaire

Avec un modèle linéaire généralisé de Poisson, on inclut les forces de mortalité de la référence validée dans la note III1291-11 v1.4 et on permet des interactions avec l'âge et l'année calendaire.

On suppose que le nombre de décès de l'organisme à l'âge x^* et l'année calendaire t^* est déterminé par

$$D_{x^*, t^*} \sim \text{Poisson}(\text{ER}_{x^*, t^*} \varphi_{x^*}(t^*)),$$

avec $\varphi_{x^*}(t^*) = \beta_0 + \beta_1 \log \varphi_{x^*}^{\text{réf}}(t^*) + \beta_2 x^* + \beta_3 t^* + \beta_4 x^* t^*$,

où x^* et t^* correspondent respectivement à la plage d'âges et période d'observation communes avec la référence de mortalité et $\varphi_x^{\text{réf}}(t)$ sont les forces de mortalité de la référence.

De façon similaire à la section précédente, le choix des x^* est déterminé par la page d'âges dont l'exposition ER_{x^*,t^*} est non nul :

$$x^* = \left[\max(\min(x | ER_{x,t} \neq 0), \min(x^{\text{réf}})); \min(\max(x | ER_{x,t} \neq 0), \max(x^{\text{réf}})) \right].$$

Si nous n'incluons pas d'interactions, on observera des mouvements parallèles des forces de mortalité selon la mortalité de référence pour chaque dimension (l'âge et l'année calendaire). Ce phénomène est certainement peu plausible et les interactions doivent à l'idéal être incorporées. Néanmoins, les interactions avec l'année calendaire ne peuvent raisonnablement être prises en compte que si l'on dispose d'un historique commun avec la référence supérieur ou égal à 10 ans.. Pour la population masculine et féminine de l'exercice, nous disposons seulement de 3 années communes avec la référence. En conséquence, les interactions avec l'année calendaire ne sont pas prises en compte dans l'illustration suivante. Les tables 3 et 4 présentent les valeurs des paramètres β_0 , β_1 et β_2 du modèle linéaire généralisé de Poisson pour la population masculine et féminine respectivement.

Coef.	Par. est.	Err. Std.	z value	p value
β_0	-4.6741	2.1648	-2.159	0.0308
β_1	0.5847	0.1884	3.104	0.0019
β_2	0.0322	0.0194	1.667	0.0956

TABLE 3: Résultats du modèle linéaire généralisé de Poisson, population masculine.

Coef.	Par. est.	Err. Std.	z value	p value
β_0	3.7054	1.4493	2.557	0.0106
β_1	1.3211	0.1163	11.363	$< 2e - 16$
β_2	-0.0399	0.0127	-3.149	0.0016

TABLE 4: Résultats du modèle linéaire généralisé de Poisson, population féminine.

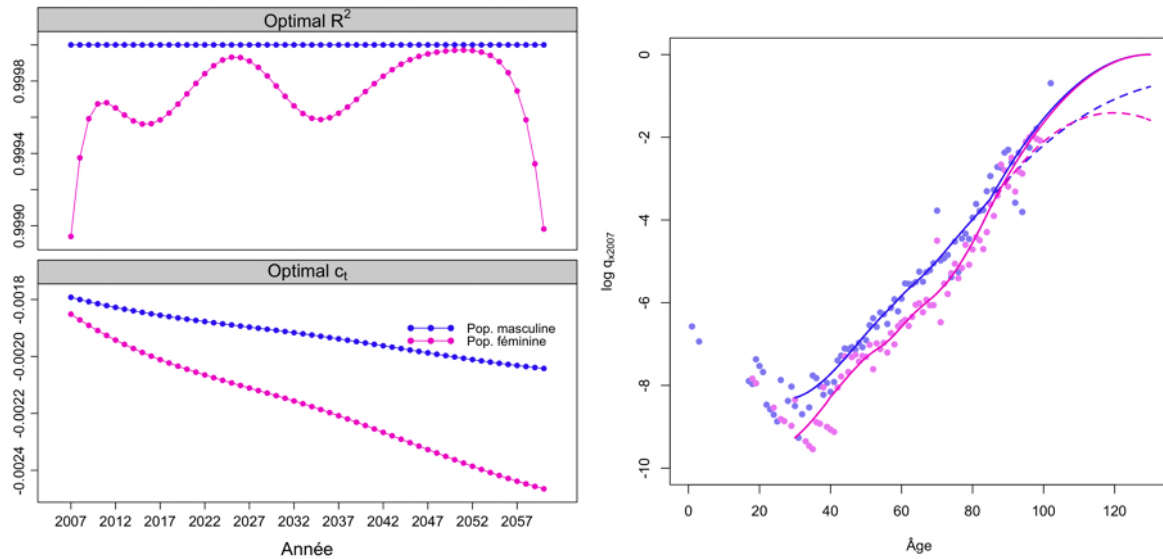
Ainsi, on obtient les probabilités de décès de l'organisme $\hat{q}_x(t)$ pour $x \in [30, 130]$ et $t \in [2012, 2060]$ par

$$\hat{q}_x(t) = 1 - \exp \left(1 - \exp \left(\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 \log \varphi_x^{\text{réf}}(t) + \hat{\beta}_2 x + \hat{\beta}_3 t + \hat{\beta}_4 x t \right) \right).$$

La déviation entre la mortalité de l'organisme et la référence peut entraîner des estimations peu plausibles aux âges élevés pour les projections à long terme. Nous appliquons la procédure de [Denuit and Goderniaux \(2005\)](#), cf. section 2.5 de la note II1291-11 v1.4. Le R^2 correspondant aux modèles de régression ajustés ainsi que les paramètres de régression c_t estimés sont présentés Figure 3a pour la population masculine et féminine.

Le modèle capture plus de 99.9 % de la variance des probabilités de décès aux âges élevés, cf. Figure 3a panel haut, pour les deux populations. Le paramètre de régression \hat{c}_t décroît de façon relativement linéaire avec l'année calendaire, cf. Figures 3a panel bas. L'objet de cette note n'est pas de comparer les méthodes, néanmoins, contrairement aux sections précédentes, nous constatons que la vitesse d'amélioration est beaucoup plus rapide pour la population féminine que pour la population masculine.

Nous conservons les $\hat{q}_x(t)$ originaux pour les âges inférieurs à 85 ans pour la population masculine et féminine, et nous remplaçons les probabilités annuelles de décès au-delà pour les valeurs ajustées provenant du modèle de fermeture. Les résultats pour l'année calendaire 2007, sont exposés dans la Figures 3b pour la population masculine et féminine. À titre d'information, nous avons conservé l'ajustement initial obtenu par notre méthode 3 (ligne pointillée).



(a) R^2 et paramètres de régression c_t estimés.

(b) Ajustement avant et après fermeture.

FIGURE 3: Paramètres de régression [Denuit and Goderniaux \(2005\)](#) et ajustement obtenu pour l'année 2007 pour la méthode 3.

3.4 Méthode 4 : Lissage non-paramétrique de la table du moment et application d'une dérive de mortalité

On considère la construction d'une table du moment sur la base des données agrégées de l'organisme que l'on ajuste avec un modèle non-paramétrique puis l'application à cette table des dérivées directement calculées sur la référence de mortalité. Il est utile de noter que cette méthode requière une validation par un expert.

Du fait du faible historique éventuel disponible, on envisage le modèle non-paramétrique

$$D_x \sim \text{Poisson} \left(\text{ER}_x \varphi_x^{\text{réf}} \exp(f(x)) \right),$$

incluant le nombre de décès espérés $\text{ER}_x \varphi_x^{\text{réf}}$ de la référence de mortalité et où f est une fonction lisse non-spécifié de l'âge atteint x , appliqué à la table du moment de l'organisme.

De manière similaire à la section 3.3, on utilise le cadre de travail des GLMs. Le rôle des GLMs est, ici, celui d'un modèle *en arrière plan* qui est ajusté localement. Nous considérons la méthode de vraisemblance locale pour estimer la fonction lisse $f(x)$, présentée en annexe de la note II1291-11 v1.4.

La sélection des paramètres de lissage (la fenêtre d'observation λ et le degré du polynôme p) est un compromis entre deux objectifs : L'élimination des irrégularités, et l'ajustement désiré dans la progression des forces de mortalité. Cela souligne l'importance de d'une investigation poussée comme condition d'un jugement fiable. Pour trouver ces paramètres, la stratégie est d'évaluer un nombre d'ajustements *candidats* et d'utiliser un critère pour sélectionner parmi les ajustements celui qui aura le score le plus faible. Ici, nous utilisons le *Akaike information criterion* (AIC) basé sur la déviance.

En pratique, les paramètres de lissage sont sélectionnés à l'aide de diagnostics graphique. Les Figures 4a et 4b présentent les valeurs de l'AIC en fonction des degrés de liberté v_2 .

Nous utilisons les degrés de liberté à la place de la fenêtre d'observation comme abscisse. Ceci aide à l'interprétation. Par exemple, 3 degrés de liberté représentent un modèle de lissage relativement peut flexible, alors que 10 degrés de liberté représentent un modèle avec beaucoup de caractéristiques. Cela aide aussi à la comparaison, car nous pouvons calculer des valeurs de l'AIC pour différents degré du polynôme et les ajouter au graphique.

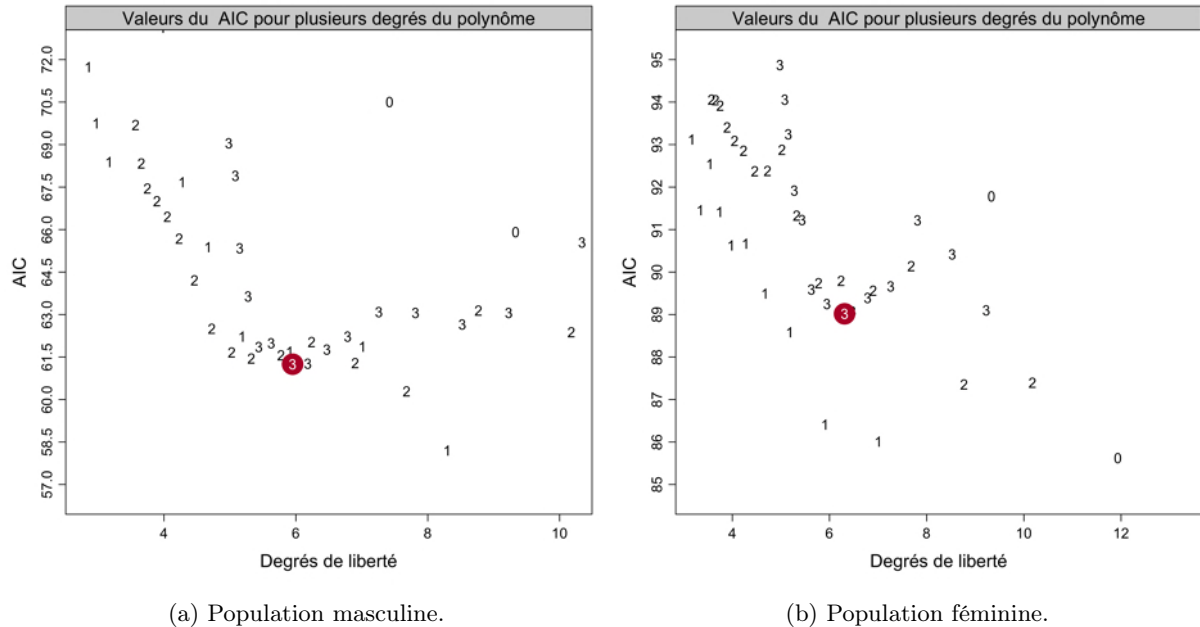


FIGURE 4: Valeurs de l'AIC en fonction des degrés de liberté v_2 .

Le choix des paramètres de lissage est déterminé en suivant les recommandations de [Cleveland and Devlin \(1988\)](#). Nous choisissons les paramètres lorsque l'AIC atteint un minimum ou un plateau après une forte descente. En conséquence, on sélectionne un ajustement cubique avec $v_2 = 5.95$ et 6.30 , correspondant à une fenêtre d'observation de 29 et 27 observations pour la population masculine et féminine respectivement. La Table 5 présente les paramètres de lissage.

Tables	AIC	Degré de liberté	λ	p
Pop. masculine	61.24	5.95	29	3
Pop. féminine	89.01	6.30	27	3

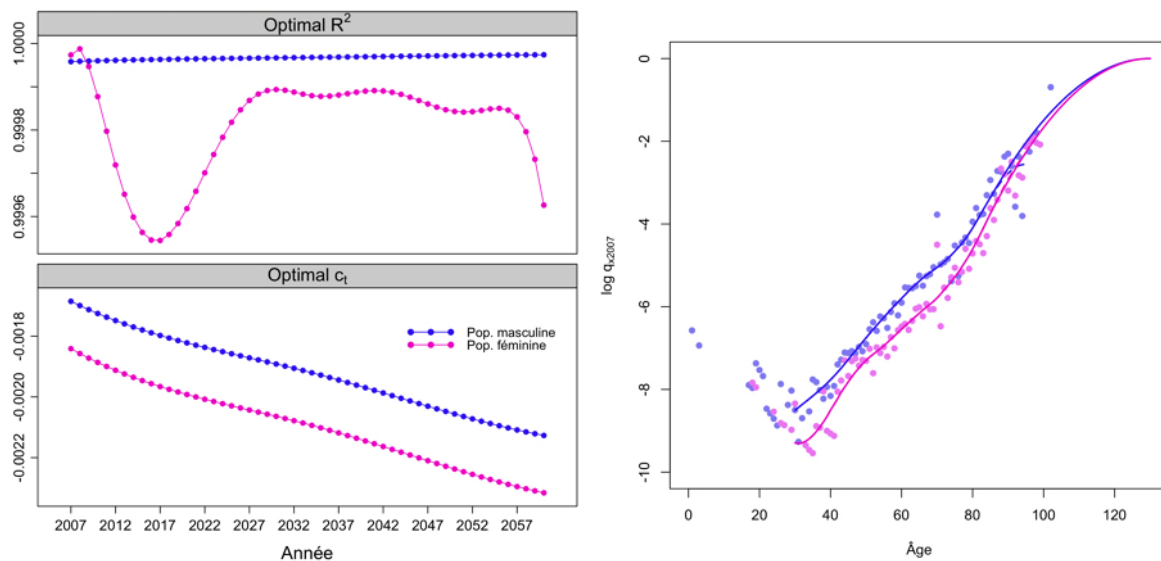
TABLE 5: Paramètres de lissage associé à la vraisemblance locale pour le lissage des tables « du moment ».

Une fois la table du moment ajustée, on applique les taux d'amélioration obtenus à partir de la référence de mortalité. Il convient alors de choisir quelle année calendaire t sera utilisée pour obtenir les dérivées $\varphi_x(t+1)/\varphi_x(t)$. Pour cela, similairement à la note II1291-11 v1.4, nous calculons les quantités résumant la qualité de l'ajustement telles que la déviance, χ^2 , R^2 , $MAPE$ et SMR . Ces quantités sont définies en annexe de la note II1291-11 v1.4. Les résultats pour la population masculine et féminine sont présentés dans la Table 6. Pour les deux populations, le choix de l'année calendaire t n'est pas évident, les quantités donnant des résultats divergents. Néanmoins, nous sélectionnons l'année 2008 ayant la plus faible déviance et un SMR plus proche de 1.

	Pop. masculine			Pop. féminine		
	2007	2008	2009	2007	2008	2009
Deviance	264.07	261.22	262.49	213.46	212.37	213.47
χ^2	299.52	231.80	289.20	231.80	227.02	224.53
R^2	0.7032	0.7054	0.7067	0.8496	0.8506	0.8504
MAPE (%)	26.08	26.46	27.05	30.32	30.70	31.23
SMR	1.021	1.0031	0.9855	1.0187	1.0012	0.9840

TABLE 6: Comparaison entre les années calendaires utilisées pour calculer les dérivés.

Compte tenu de l'insuffisance probables des données au-delà d'un certain âge, nous n'avons pas d'information valide pour dériver la mortalité aux âges élevés. Nous appliquons la procédure de [Denuit and Goderniaux \(2005\)](#), cf. section 2.5 de la note II1291-11 v1.4. Le R^2 correspondant aux modèles de régression ajustés ainsi que les paramètres de régression c_t estimés sont présentés Figure 5a pour la population masculine et féminine.



(a) R^2 et paramètres de régression c_t estimés.

(b) Ajustement avant et après fermeture.

FIGURE 5: Paramètres de régression [Denuit and Goderniaux \(2005\)](#) et ajustement obtenu pour l'année 2007 pour la méthode 4.

Le modèle capture plus de 99.9 % de la variance des probabilités de décès aux âges élevés, cf. Figure 3a panel haut, pour les deux populations. Le paramètre de régression \hat{c}_t décroît de façon relativement linéaire avec l'année calendaire, cf. Figures 5a panel bas. Similairement aux méthodes 1 et 2, la mortalité aux grands âges décroît et la vitesse d'amélioration est relativement identique pour les deux populations.

Nous conservons les $\hat{q}_x(t)$ originaux pour les âges inférieurs à 85 ans pour la population masculine et féminine, et nous remplaçons les probabilités annuelles de décès au-delà pour les valeurs ajustées provenant du modèle de fermeture. Les résultats pour l'année calendaire 2007, sont exposés dans la Figures 5b pour la population masculine et féminine. À titre d'information, nous avons conservé l'ajustement initial obtenu par notre méthode 4 (ligne pointillée).

4 Conclusion

Nous avons identifié, dans cette étude méthodologique, les contraintes et problèmes auxquels nous devrions répondre concernant la mise en place d'une méthode de positionnement permettant à un organisme donné d'ajuster la référence de mortalité pour se rapprocher d'une vision *best estimate* de ses engagements. Nous avons exposé et illustré quatre méthodes qui répondent aux problèmes soulevés :

- i. Une méthode à un paramètre avec le calcul du SMR.
- ii. Une méthode à deux paramètres représentant linéairement les différences entre les probabilités conditionnelles de décès issues de la table de mortalité de l'organisme et celles de la référence.
- iii. Une méthode utilisant le cadre de travail des GLMs avec un modèle de Poisson comportant la référence de mortalité comme variable explicative et permettant des interactions avec l'âge et l'année calendaire.
- iv. Une méthode utilisant le cadre de travail des GLMs avec un ajustement non-paramétrique locale d'un modèle de Poisson et l'application à cette table des taux d'amélioration ajustés à partir de la référence.

Ces méthodologies sont ordonnées suivant une complexité croissante. Des indicateurs de validation, précisés dans la note II1291-14, permettent de juger de la pertinence de la table. Les divergences entre les modèles y sont appréhendées sur trois niveaux :

- i. L'ajustement de la mortalité passée : Résidus, tests et quantités résumant les écarts entre l'ajustement et les observations sont utilisés pour comparer les forces et faiblesses de chaque approche., cf. quantités présentées en annexes de la note II1291-11 v1.4.
- ii. Les tendances d'évolution de la mortalité : Il s'agit de confronter les espérances de vie générationnelles partielles et périodiques résiduelles calculées avec les différents modèles et raisonner en terme de plausibilité des tendances d'évolution et de cohérence avec les tendances historiques. En addition, si nous disposons de la mortalité masculine et féminine, nous pouvons comparer les tendances d'amélioration et juger de la plausibilité de l'évolution commune de la mortalité de deux sexes.
- iii. Cette notion est transversale aux deux points précédents. Elle concerne le degré de précision de l'ajustement. Elle est appréhendée par les intervalles de confiances sur les décès, espérances de vie et autres quantités relatives à la durée de vie ajustée.

Le choix entre les modèles est partiellement une question de jugement et dépend de l'objectif pour laquelle la table de mortalité prospective est construite. Il appartiendra aux utilisateurs potentiels de la table de décider des poids à affecter aux différents critères de validation.

Dans cette étude, nous avons seulement considéré la dimension statique du positionnement en se basant uniquement sur l'information disponible lors de la construction de la table. Il sera intéressant par la suite de prendre en compte une dimension dynamique permettant un réajustement pluriannuel des probabilités conditionnelles de décès, en fonction de l'information additionnelle recueillie sur les années écoulées. On peut penser à un mécanisme de détection de rupture de tendance donnant un indicateur sur la nécessité d'un réajustement.

Références

- Brass, W. (1971). On the scale of mortality. In W. Brass (ed.), editor, *Biological aspects of demography*. London : Taylor & Francis.
- Cleveland, W. S. and Devlin, S. J. (1988). Locally weighted regression : An approach to regression analysis by local fitting. *Journal of the American Statistical Association*, **83**, 596–610.
- Denuit, M. and Goderniaux, A. C. (2005). Closing and projecting life tables using log-linear models. *Bulletin of the Swiss Association of Actuarial Science*, (1), 29–48.
- Liddell, F. D. K. (1984). Simple exact analysis of the standardised mortality ratio. *Journal of Epidemiology and Community Health*, **38**, 85–88.
- Planchet, F. and Thérond, P. (2011). *Modélisation statistique des phénomènes de durée - Applications actuarielles*. Assurance Audit Actuariat. Economica Paris.
- Tomas, J. and Planchet, F. (2013). Prospective mortality tables : taking heterogeneity into account. *Cahiers de Recherche de l'ISFA*, **2013**(5), 1–33.

Annexes

A Les données

La Table 7 présente les caractéristiques observées de la population masculine et féminine. Pour information, il s'agit d'un portefeuille composé uniquement de contrats d'épargne.

	Âge moyen à l'entrée	Âge moyen à la sortie	Exposition Moyenne	Âge moyen au décès	Période d'observation	
					Début	Fin
Pop. Masculine	46.44	50.11	3.66	62.15	01/01/2005	31/12/2009
Pop. Féminine	47.50	51.13	3.63	64.88	01/01/2005	31/12/2009

TABLE 7: Statistiques observées pour la population masculine et féminine du portefeuille.

Les Figures 6 et 7 présentent les statistiques observées de la population masculine et féminine respectivement.

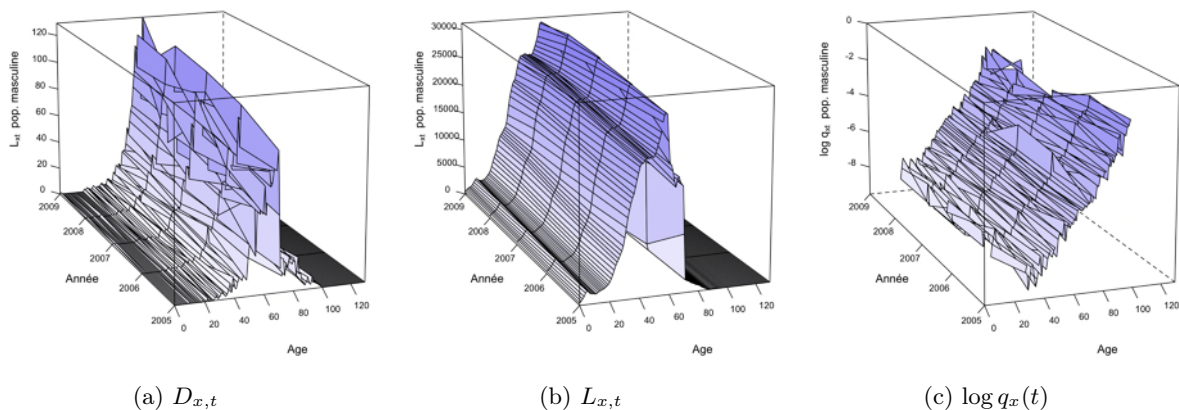


FIGURE 6: Surfaces observées, population masculine.

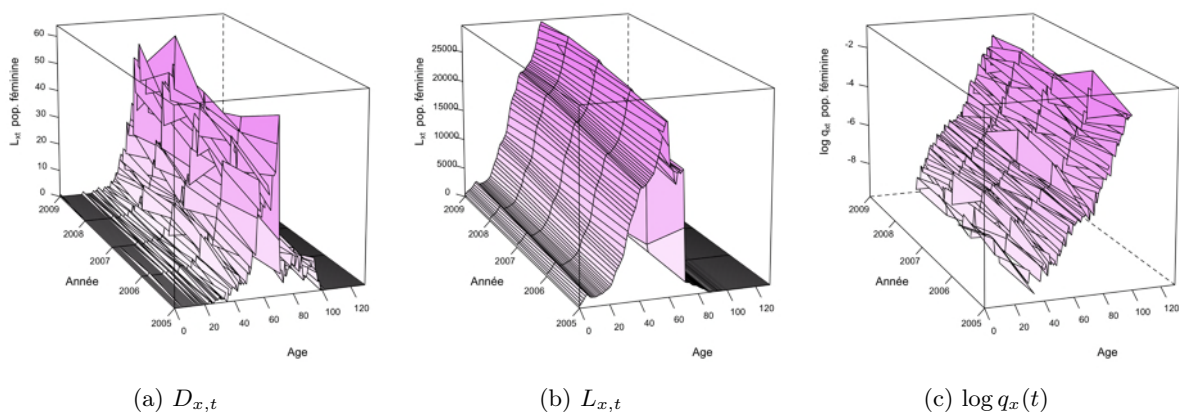


FIGURE 7: Surfaces observées, Population féminine.